

MECHANIKA BUDOWLI / SEM.5
ĆWICZENIE NR 1

METODA PRZEMIESZCZEŃ

Termin oddania: 12.12.2024

Data	Uwagi sprawdzającego	Podpis

~~ opracowanie: mgr inż. Anita Kaczor ~~ <https://anita.kaczor.pracownik.put.poznan.pl> ~~

Dla zadanej **RAMY / BELKI**:

- Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.
- Sprawdzić naprężenia normalne w obu grupach przekrojów I_1 i I_2 , porównać je z wartościami dopuszczalnymi naprężeń i sformułować wnioski.

UWAGA: Jeżeli naprężenia przekroczą wartości dopuszczalne, zadanie w tym miejscu przerywamy, we wnioskach proszę opisać niezbędny dalszy tok obliczeń prowadzący do zaprojektowania przekrojów I_1 i I_2 spełniających warunek nośności.

W obliczeniach przyjąć: $E = 210 \text{ GPa}$, $f_y = 235 \text{ MPa}$.

DANE DLA RAMY

Nr schematu: **6**

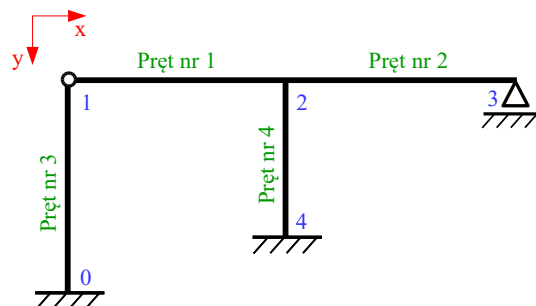
Wymiary i obciążenie przęsłowe:

Pręt	L [m]	Przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
1	5	I 260	0	0	0
2	4,5	I 260	0	0	-32
3	5	I 240 PE	9	0	0
4	4	I 240 PE	0	30	0

Obciążenie węzłowe:

siła skupiona P_x (pozioma) w węźle 1	10 kN
moment skupiony w węźle 2	30 kNm

Schemat ramy:



DANE DLA BELKI

Nr schematu: **1**

Wymiary i obciążenie przęsłowe:

Pręt				
1	3,5	I 200 HEA	8	0
2	4	I 160 PE	0	47
3	3,5	I 160 PE	9	0

Obciążenie węzłowe:

siła skupiona pionowa w węźle 2	-15 kN
moment skupiony w węźle 1	-30 kNm

UWAGA!

Obciążenie przęsłowe:

- obciążenie równomiernie rozłożone q działa na całej długości przęta, prostopadłe do osi przęta;
- siła P prostopadła do osi przęta, przyłożona w połowie długości przęta;
- moment skupiony M przyłożony w połowie długości przęta.

Obciążenie przęsłowe i węzłowe – zwroty:

- siły skupione oraz obciążenie równomiernie rozłożone – wartość dodatnia oznacza zwrot zgodny z osią układu współrzędnych, który jest zaznaczony na schemacie, ujemna – przeciwny;
- momenty skupione – wartość dodatnia oznacza zwrot w prawo, ujemna – w lewo.

Schemat nr 6

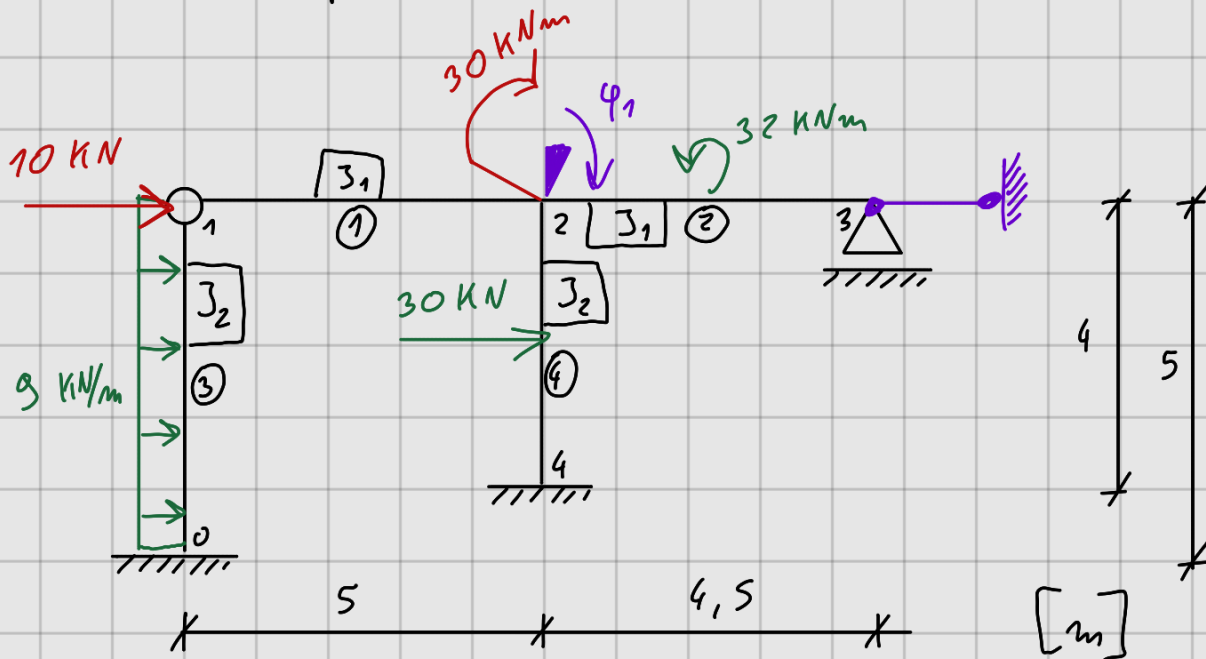
P_{rz}	L	P_{achoj}	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
1	5	I 260	0	0	0
2	4,5	I 260	0	0	-32
3	5	I 240 PE	9	0	0
4	4	I 240 PE	0	30	0

siła skupiona P_x (pozioma)
w węźle 1 = 10 kN

moment skupiony
w węźle 2 = 30 kNm

układ podstawowy

$SGN = 2$



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$J_1 (\text{I 260}) = 5140 \text{ cm}^4 \quad EJ_1 = 2,1 \cdot 5140 = 12054 \text{ kNm}^2$$

$$J_2 (\text{I 240 PE}) = 3890 \text{ cm}^4 \quad EJ_2 = 2,1 \cdot 3890 = 8169 \text{ kNm}^2$$

$$\frac{EJ_1}{EJ_2} = \frac{12054}{8169}$$

$$EJ_2 = EJ_0$$

$$\frac{EJ_1}{EJ_0} = \frac{12054}{8169}$$

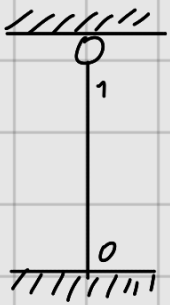
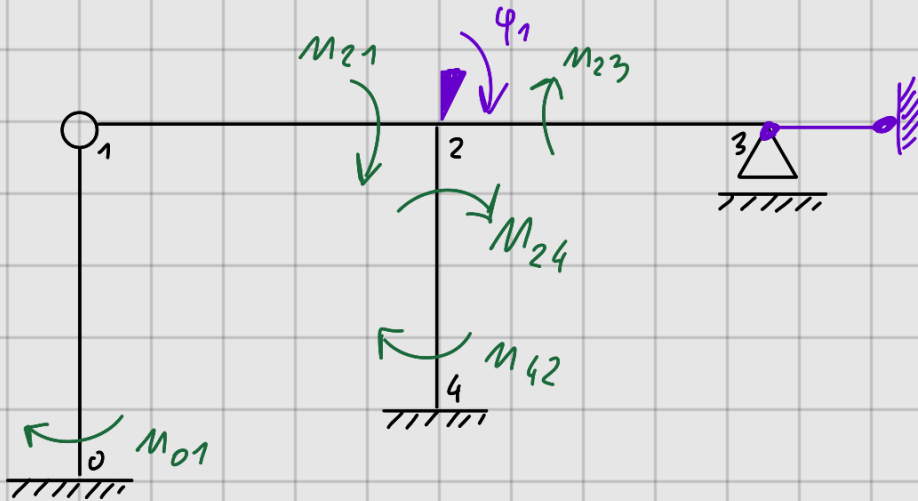
$$EJ_1 \cdot 8169 = 12054 \cdot EJ_0 \quad | : 8169$$

$$EJ_1 = 1,4756 EJ_0$$

UKŁAD RÓWNAŃ

$$\begin{cases} r_{11} \varphi_1 + r_{12} \Delta_2 + r_{1p} = 0 \\ r_{12} \varphi_1 + r_{22} \Delta_2 + r_{2p} = 0 \end{cases}$$

Stam $\varphi_1 = 1$



$$M_{01} = 0$$

$$M_{10} = 0$$



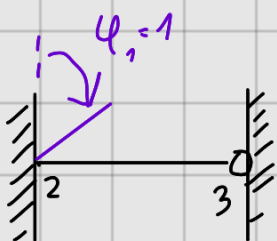
$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = \frac{3EI_1}{L} \cdot (\varphi_i) = \frac{3 \cdot 1,4756 \cdot EI_0}{5} \cdot 1 = 0,8854 EI_0$$

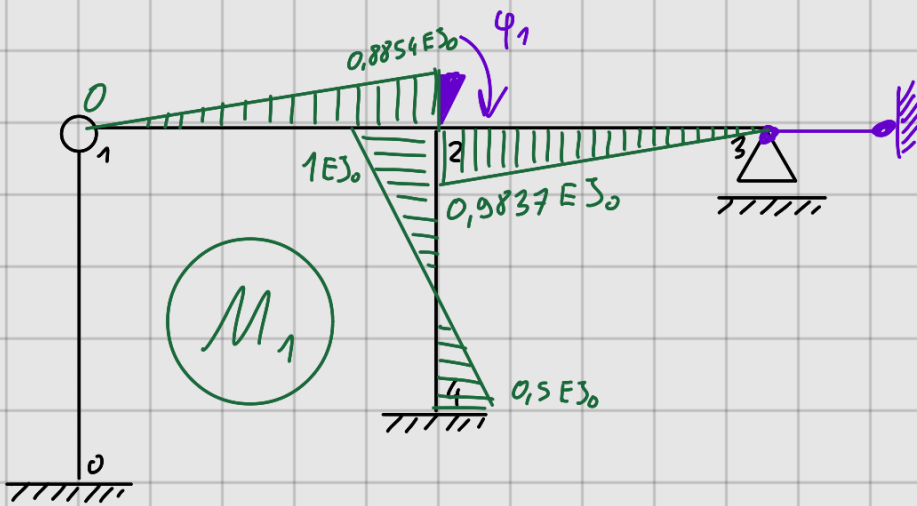


$$M_{24} = \frac{2EI_2}{L} \cdot (2 \cdot 0 + 1) = \frac{2 \cdot EI_0}{4} \cdot 1 = 0,5 EI_0$$

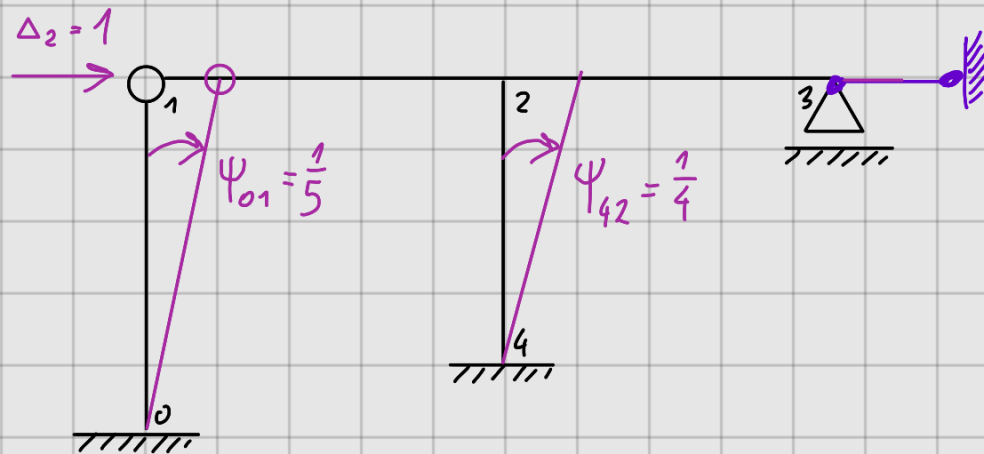
$$M_{42} = \frac{2EI_2}{L} \cdot (2 \cdot 1 + 0) = \frac{2 \cdot EI_0}{4} \cdot 2 = 1 EI_0$$



$$M_{23} = \frac{3EI_1}{L} \cdot (\varphi_i) = \frac{3 \cdot EI_1}{4,5} \cdot 1 = \frac{3 \cdot 1,4756 \cdot EI_0}{4,5} \cdot 1 = 0,9837 EI_0$$



Stam $\Delta_2 = 1$



$$M_{01} = \frac{3EJ_2}{L}(\varphi_3 - \psi_{01}) = \frac{3 \cdot EJ_0}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{25} EJ_0 = -0,12 EJ_0$$

$$M_{10} = 0$$

$$M_{12} = 0$$

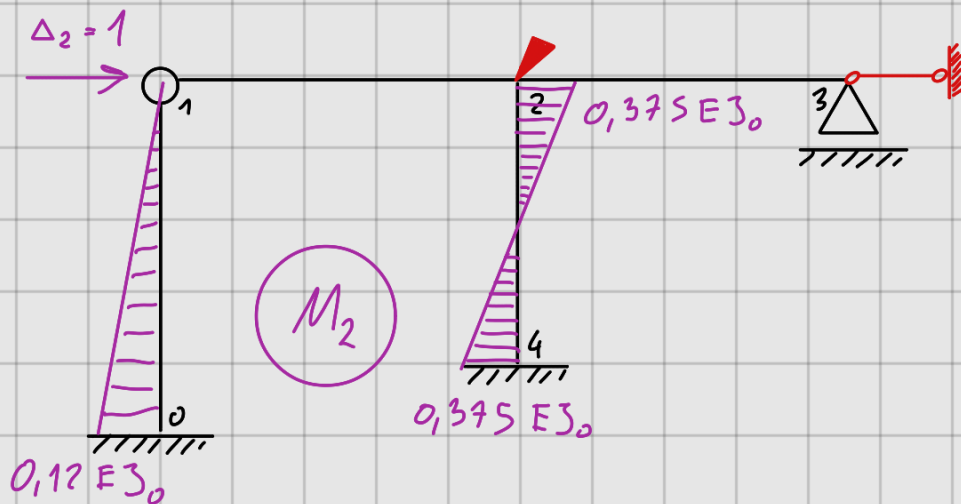
$$M_{21} = \frac{3EJ_1}{L}(\varphi_2 - \psi_{21}) = \frac{3EJ_1}{5} \cdot 0 = 0 EJ_0$$

$$M_{24} = \frac{2EJ_2}{L}(2\varphi_2 + \varphi_4 - 3\psi_{24}) = \frac{2 \cdot EJ_0}{4} \cdot \left(-3 \cdot \frac{1}{4}\right) = -0,375 EJ_0$$

$$M_{42} = \frac{2EJ_2}{L}(2\varphi_4 + \varphi_2 - 3\psi_{42}) = \frac{2 \cdot EJ_0}{4} \cdot \left(-3 \cdot \frac{1}{4}\right) = -0,375 EJ_0$$

$$M_{23} = 0$$

$$M_{32} = \frac{3EJ}{L} \cdot (\psi_3 - \psi_{32}) = \frac{3EJ}{4,5} \cdot 0 = 0EJ_0$$



Wyznaczenie r_{ik}

równowaga momentów w węźle 2 w stanie $\psi = 1$

$$\sum M_2^{(1)} = 0$$

$$r_{11} = 1EJ_0 + 0,9837EJ_0 + 0,8854EJ_0$$

$$r_{11} = 2,8691EJ_0$$

równowaga momentów w węźle 2 w stanie $\Delta_2 = 1$

$$\sum M_2^{(2)} = 0$$

$$r_{12} = -0,375EJ_0$$

Wyznaczenie reakcji r_{21}

$$RPW \quad \sum_j R_j^{(1)} \cdot \bar{\delta} + \sum M_{ik}^{(1)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + (0,5 EJ_0 + 1 EJ_0) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$r_{21} = -0,375 EJ_0$$

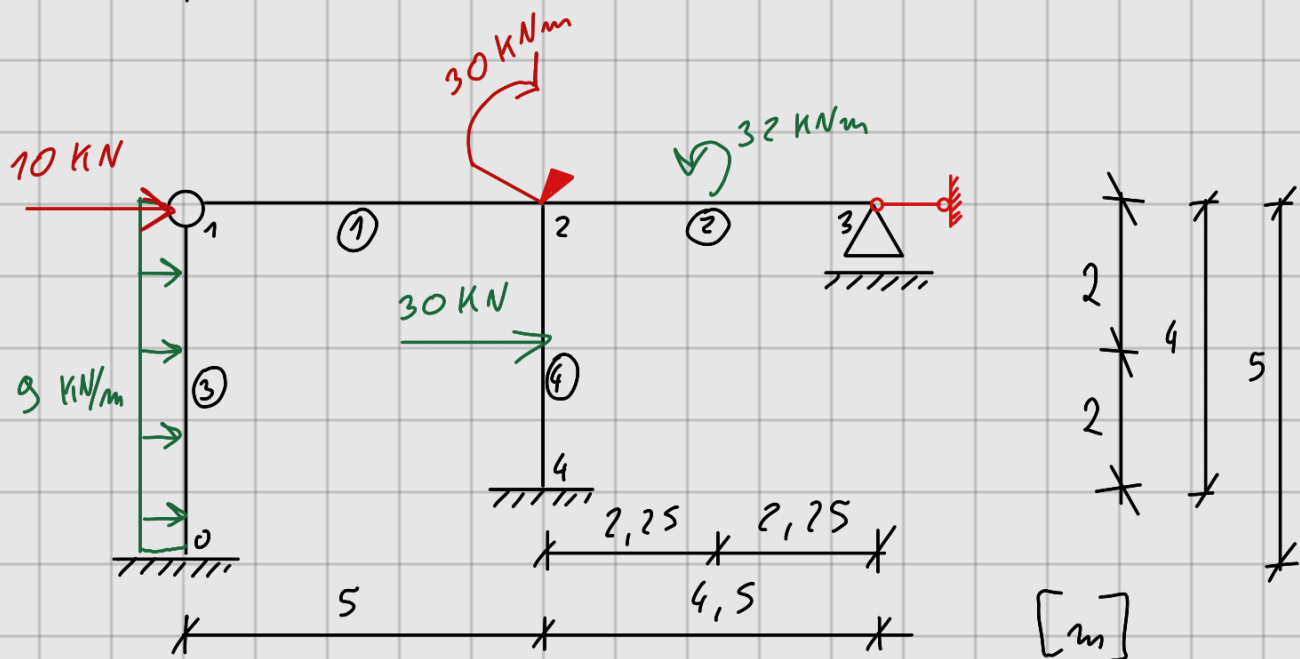
$$r_{22} \cdot \bar{1} + (2 \cdot 0,375 EJ_0) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + (0,12 EJ_0) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

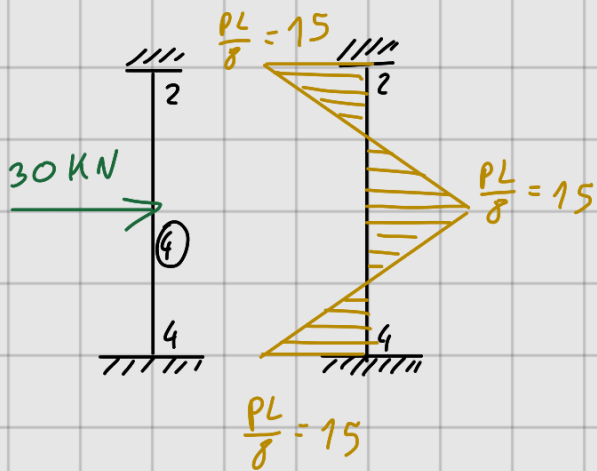
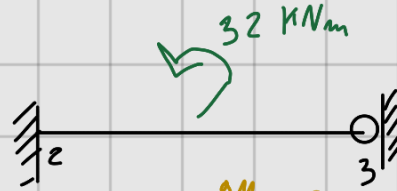
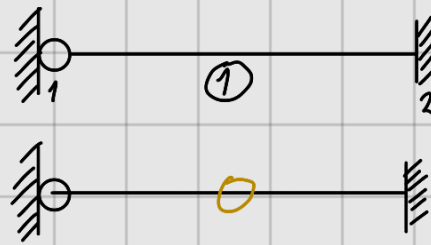
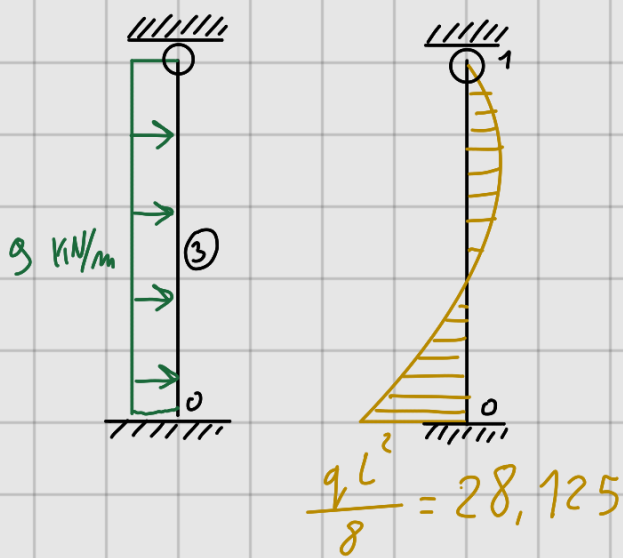
$$r_{22} = 0,2115 EJ_0$$

Macierz sztywności

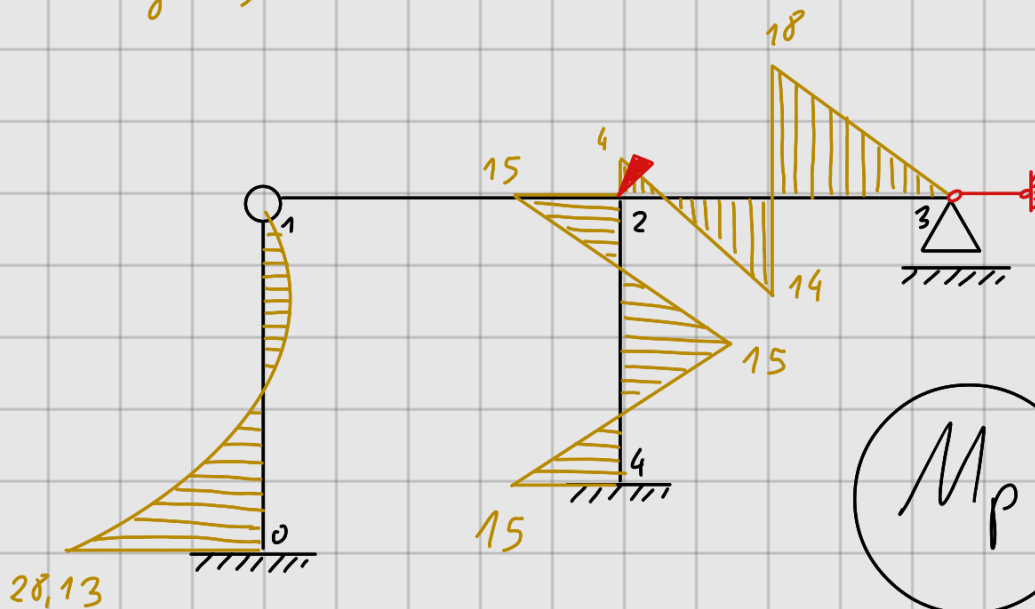
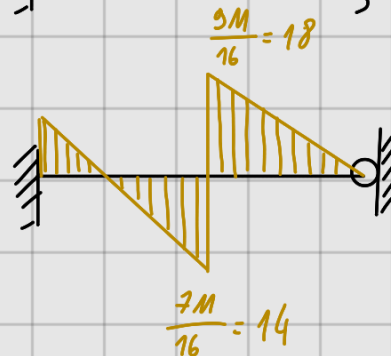
$$K = \begin{bmatrix} 2,8691 EJ_0 & -0,375 EJ_0 \\ -0,375 EJ_0 & 0,2115 EJ_0 \end{bmatrix}$$

Stan "P"



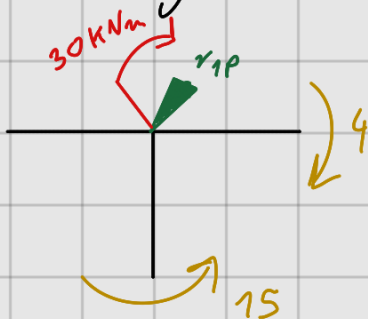


$$\frac{M}{8} = 4$$



wyznaczenie reakcji r_{1p}

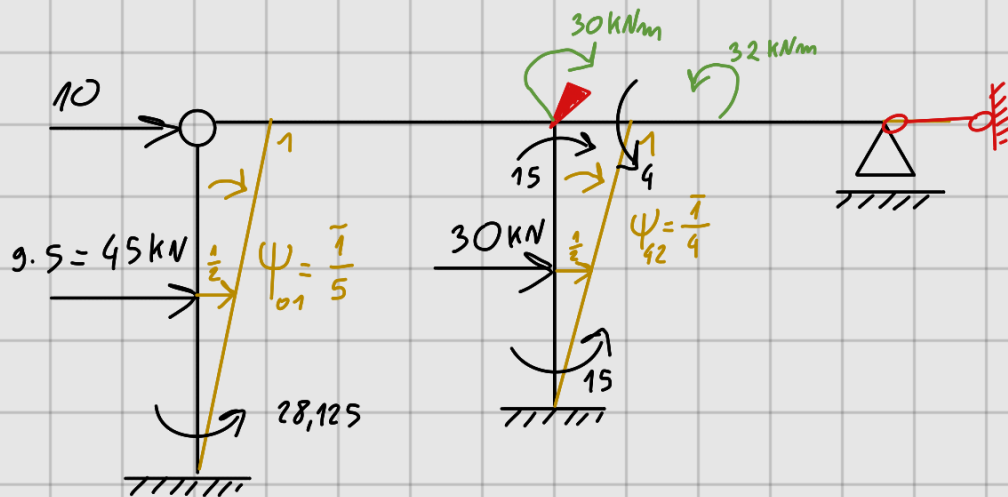
rownowaga momentów w węźle 2



$$\sum M_1^{(p)} = 0$$

$$r_{1p} = -30 - 4 + 15 = -19,00 \text{ kNm}$$

Wyznaczenie reakcji r_{2P}



RPW

$$r_{2P} \cdot \bar{1} + 10 \cdot \bar{1} + 45 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + 30 \cdot \frac{\bar{1}}{2} - 28,125 \cdot \frac{\bar{1}}{5} + (-15 + 15) \cdot \frac{\bar{1}}{4} = 0$$

$$r_{2P} = -41,875 \text{ kN}$$

Wyznaczenie niewiadomych φ_1 i Δ_2

$$\begin{cases} r_{11} \varphi_1 + r_{12} \Delta_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{12} \varphi_1 + r_{22} \Delta_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2,869 EJ_0 & -0,375 EJ_0 \\ -0,375 EJ_0 & 0,2115 EJ_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2,869 EJ_0 \cdot \varphi_1 - 0,375 EJ_0 \cdot \Delta_2 - 19 = 0 & | \cdot \frac{0,2115}{EJ_0} \\ -0,375 EJ_0 \cdot \varphi_1 + 0,2115 EJ_0 \cdot \Delta_2 - 41,875 = 0 & | \cdot \frac{0,375}{EJ_0} \end{cases}$$

$$0,6068 \cdot \varphi_1 - 0,0793 \cdot \Delta_2 = \frac{4,0185}{EJ_0}$$

$$-0,1406 \cdot \varphi_1 + 0,0793 \cdot \Delta_2 = \frac{15,70}{EJ_0}$$

$$0,4662 \cdot \varphi_1 = \frac{19,42}{EJ_0} \quad | : 0,4662$$

$$\varphi_1 = \frac{42,30}{EJ_0} = \frac{42,30}{8169} = 0,005179 \text{ rad}$$

$$\begin{cases} 2,869 E_{J_0} \cdot \varphi_1 - 0,375 E_{J_0} \cdot \Delta_2 - 19 = 0 & | \cdot \frac{0,375}{E_{J_0}} \\ -0,375 E_{J_0} \cdot \varphi_1 + 0,2115 E_{J_0} \cdot \Delta_2 - 41,88 = 0 & | \cdot \frac{2,869}{E_{J_0}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,0759 \cdot \varphi_1 - 0,1406 \cdot \Delta_2 = \frac{7,1}{E_{J_0}} \\ -1,0759 \cdot \varphi_1 + 0,6068 \cdot \Delta_2 = \frac{120,1}{E_{J_0}} \end{cases}$$

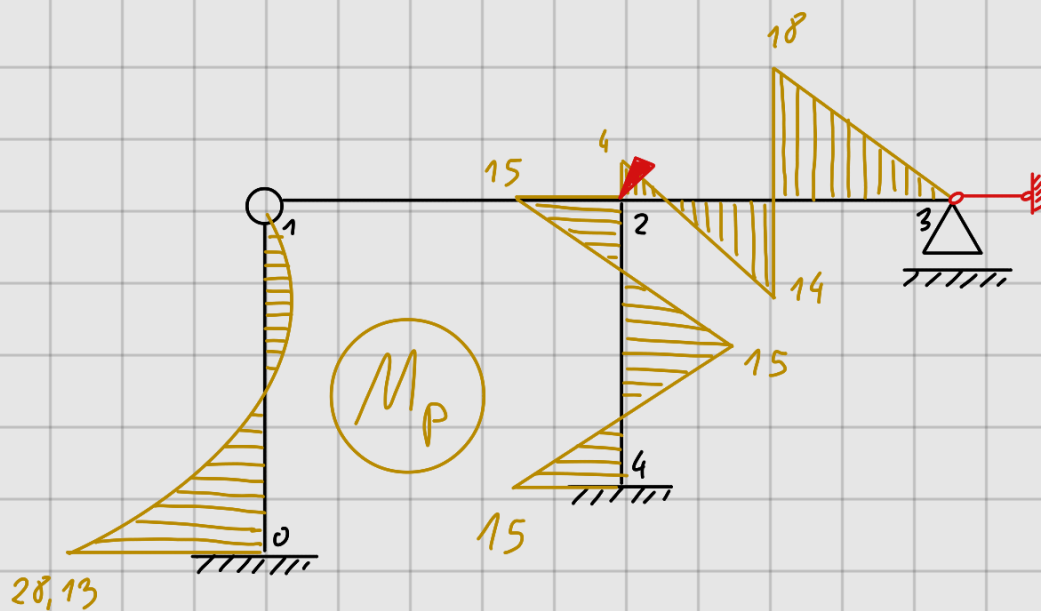
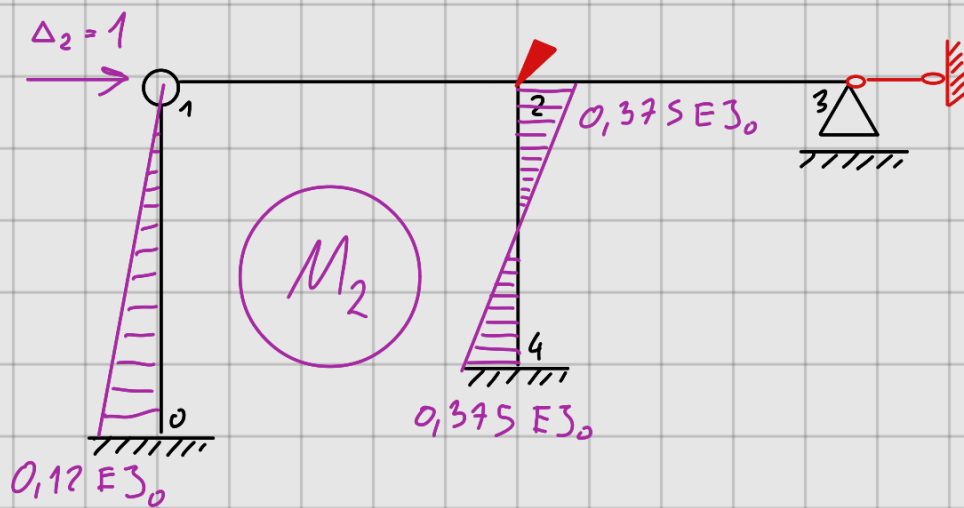
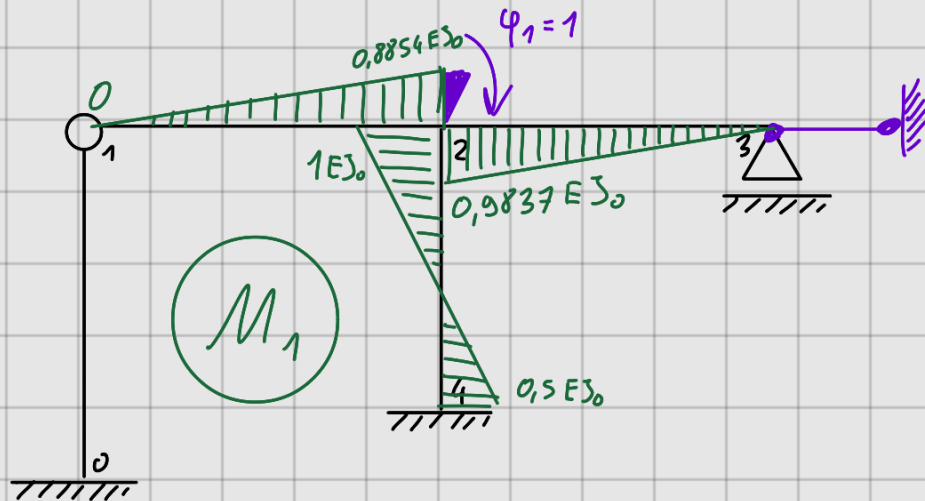
$$0,4662 \cdot \Delta_2 = \frac{127,3}{E_{J_0}} \quad | : 0,4662$$

$$\Delta_2 = \frac{273}{E_{J_0}} = \frac{273}{8169} = 0,03342 \text{ m}$$

$$\varphi_1 = 0,005179 \text{ rad}$$

$$\Delta_2 = 0,03342 \text{ m}$$

Zestawienie wykresów



Wyznaczenie rozkładu momentów zginających

$$M_{ik}^{(n)} = M_{ik}^{(1)} u_1 + M_{ik}^{(2)} \Delta_2 + M_{ik}^{(P)}$$

$$u_1 = \frac{42,30}{EJ_0}$$

$$\Delta_2 = \frac{243}{EJ_0}$$

ik	$M_{ik}^{(1)}$	$M_{ik}^{(2)}$	$M_{ik}^{(P)}$	$M_{ik}^{(n)}$
01	0	-0,12	-28,13	-60,89
10	0	0	0	0
12	0	0	0	0
21	0,8854	0	0	37,45
23	0,9837	0	-4	37,61
32	0	0	0	0
24	1	-0,375	15	-45,07
42	0,5	-0,375	-15	-36,23

$$M_{01}^{(n)} = -0,12 \cancel{EJ_0} \cdot \frac{243}{\cancel{EJ_0}} + (-28,13) = -60,89 \text{ kNm}$$

$$M_{10}^{(n)} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{(n)} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{(n)} = 0,8854 \cancel{EJ_0} \cdot \frac{42,30}{\cancel{EJ_0}} = 37,45 \text{ kNm}$$

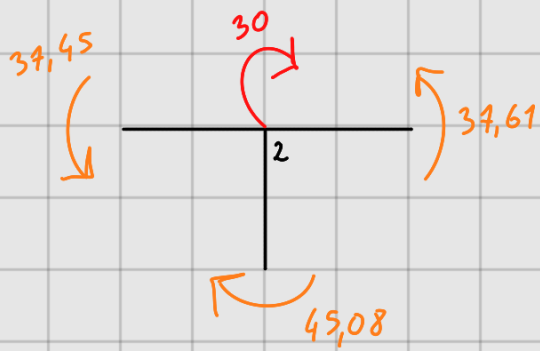
$$M_{23}^{(n)} = 0,9837 \cancel{EJ_0} \cdot \frac{42,30}{\cancel{EJ_0}} + (-4) = 37,61 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^{(n)} = 0 \text{ kNm}$$

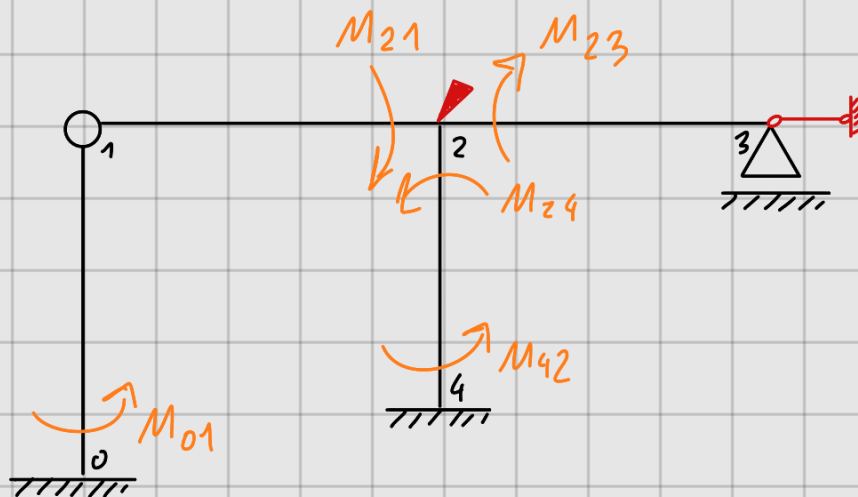
$$M_{24}^{(n)} = \cancel{EJ} \cdot \frac{42,30}{\cancel{EJ}} + (-0,375 \cancel{EJ}) \cdot \frac{243}{\cancel{EJ}} + 15 = -45,07 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^{(n)} = 0,5 \cancel{EJ} \cdot \frac{42,30}{\cancel{EJ}} + (-0,375 \cancel{EJ}) \cdot \frac{243}{\cancel{EJ}} + (-15) = -36,23 \text{ kNm}$$

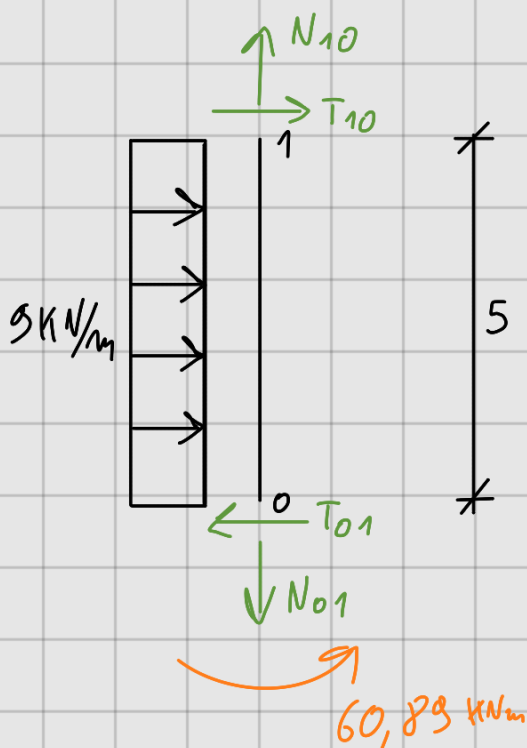
Równowaga węzła nr 2



$$30 + 45,07 - 37,45 - 37,61 = 0,01 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$



Wyznaczenie rozkładu sił tnących



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow T_{10} \cdot 5 + 9 \cdot 5 \cdot 2,5 - 60,89 = 0$$

$$5T_{10} = -51,61 / : 5 \Rightarrow T_{10} = -10,32 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow T_{01} \cdot 5 - 9 \cdot 5 \cdot 2,5 - 60,89 = 0$$

$$5T_{01} = 173,4 / : 5 \Rightarrow T_{01} = 34,68 \text{ kN}$$

Moment ekstremalny

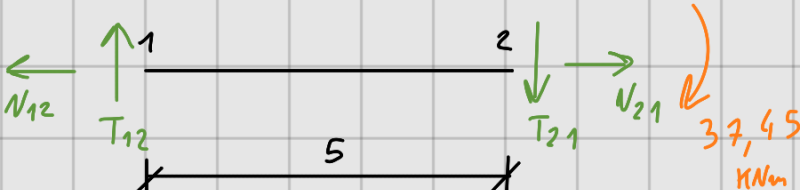
$$T(x) = 34,68 - 9x = 0 \Rightarrow x = 3,853 \text{ m}$$

$$M^{ext} = -60,89 + 34,68 \cdot 3,853 - 9 \cdot 3,853 \cdot \frac{3,853}{2} =$$

$$M^{ext} = 5,927 \text{ kNm}$$

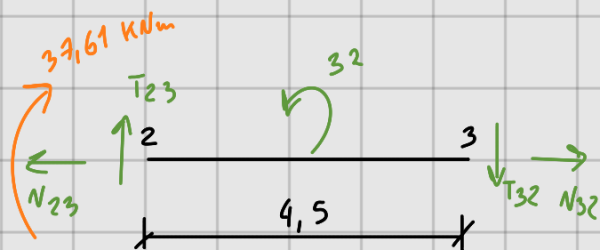
$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow T_{21} \cdot 5 + 37,45 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{21} = -7,49 \text{ kN}$$



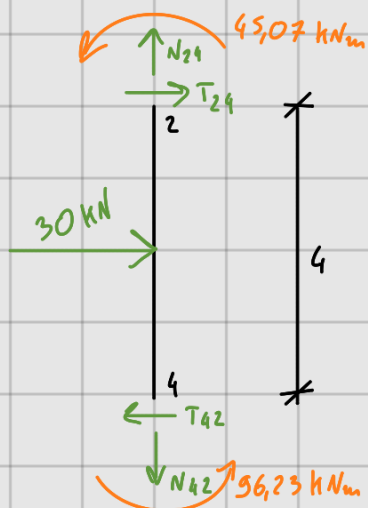
$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow T_{12} \cdot 5 + 37,45 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{12} = -7,49 \text{ kN}$$



$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow T_{32} \cdot 4,5 + 37,61 - 32 = 0 \Rightarrow T_{32} = -1,247 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow T_{23} \cdot 4,5 + 37,61 - 32 = 0 \Rightarrow T_{23} = -1,247 \text{ kN}$$



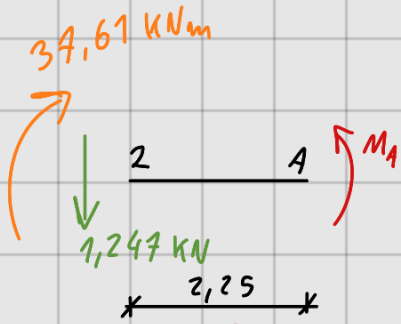
$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -45,07 - 96,23 + T_{42} \cdot 4 - 30 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4T_{42} = 201,30 / : 4 \Rightarrow T_{42} = 50,32 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow -45,07 - 96,23 + 30 \cdot 2 + 4T_{24} = 0 \Rightarrow$$

$$4T_{24} = 81,30 \Rightarrow T_{24} = 20,32 \text{ kN}$$

Doliczenie brakujących momentów dla wykresu $M_p^{(m)}$



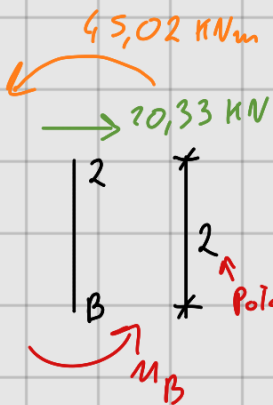
$$M_4 = -1,247 \cdot 2,25 + 34,61$$

$$M_4 = 34,80 \text{ kNm}$$

$$34,80 - 32 = 2,80 \text{ kNm}$$

zadany moment
w połowie pręta

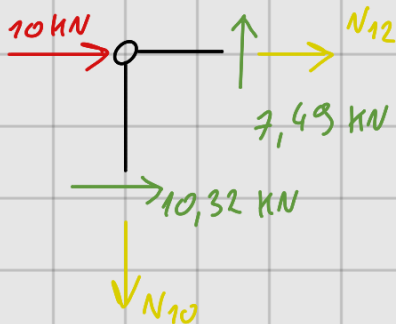
połowa długości pręta 23



$$M_B = -45,02 + 20,33 \cdot 2 \Rightarrow M_B = -4,36 \text{ kNm}$$

połowa długości pręta 24

Wyznaczenie rozkładu sił normalnych

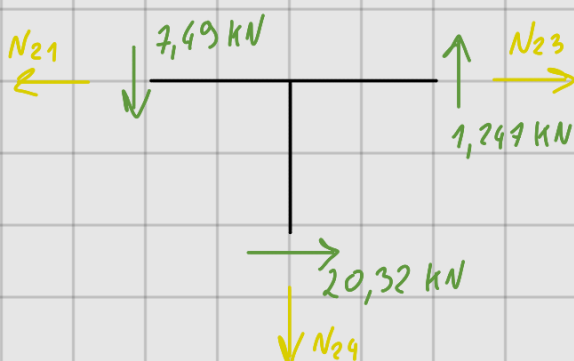


$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} = -10,32 - 10 \Rightarrow N_{12} = -20,32$$

$$N_{12} = N_{21}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{10} = 7,49 \text{ kN}$$

$$N_{10} = N_{01}$$



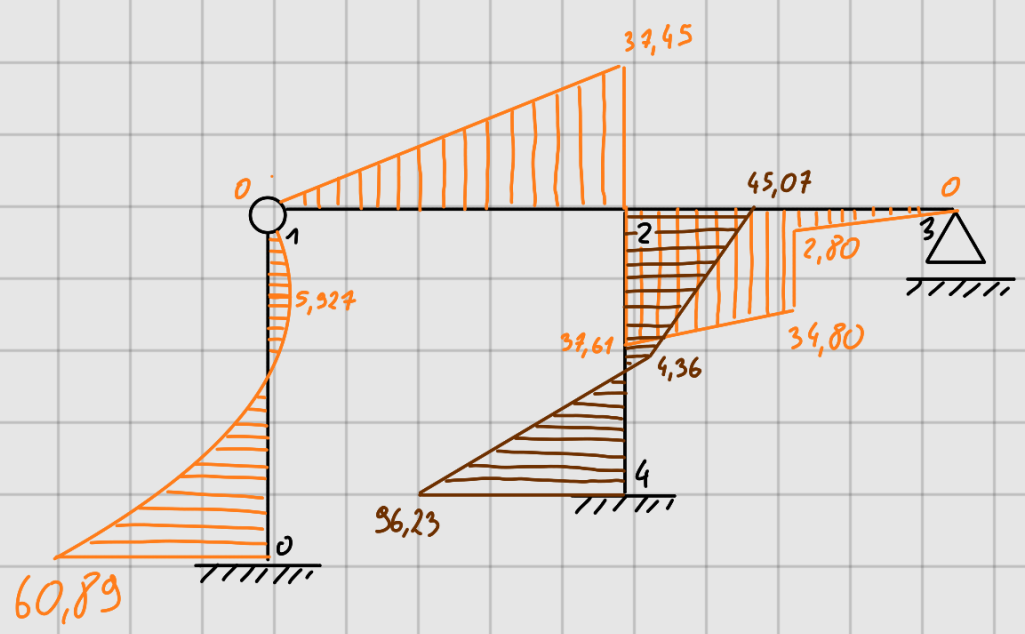
$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{24} = -7,49 + 1,247 \Rightarrow N_{24} = -6,243 \text{ kN}$$

$$N_{24} = N_{42}$$

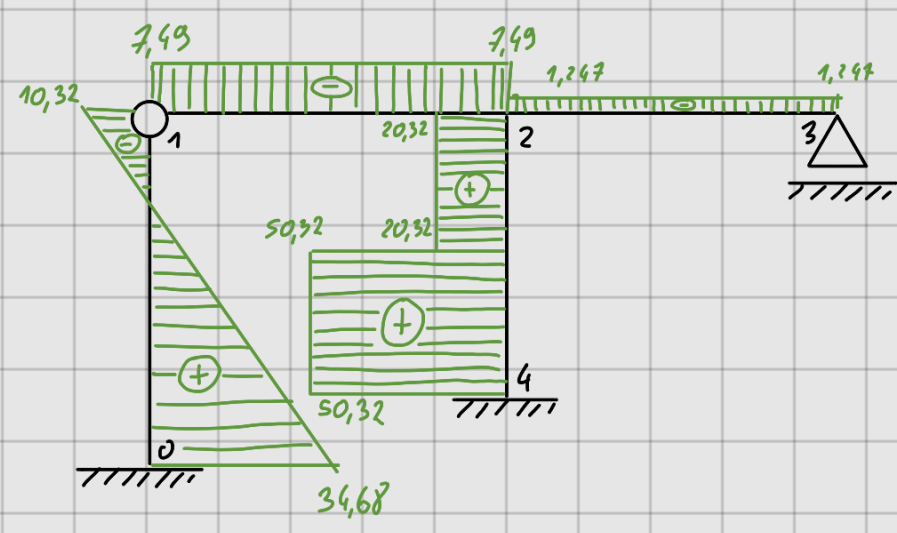
$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{23} = -20,32 + 20,32 \Rightarrow N_{23} = 0$$

$$N_{23} = N_{32}$$

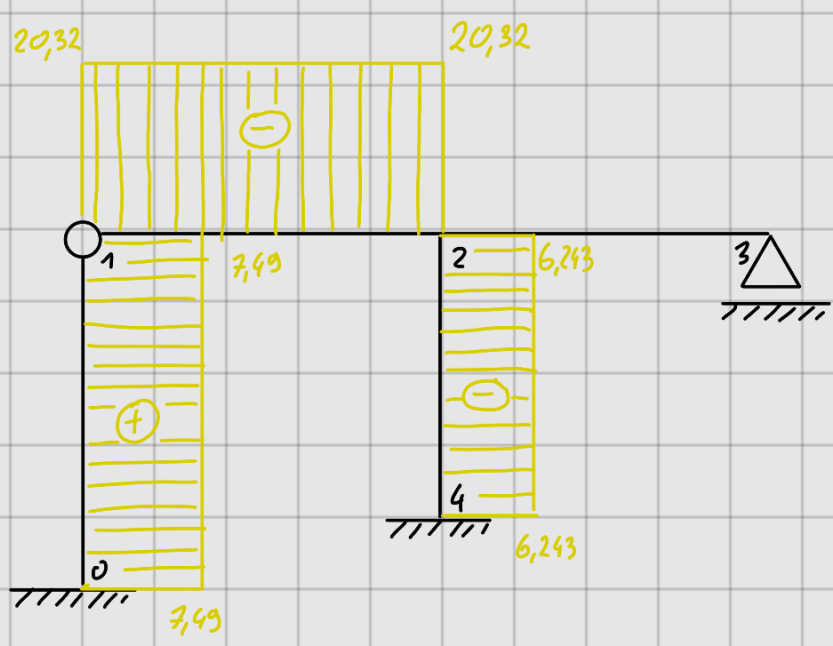
zestawienie wykresów



$M_p^{(n)}$ [kNm]



$T_p^{(n)}$ [kN]

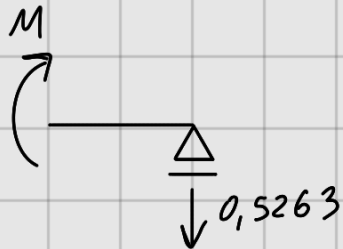


$N_p^{(n)}$ [kN]

Kontrola kinematyczna - sprawdzenie przemieszczenia pionowego

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3,5 V_B - 1 \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_B = 0,5263$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -0,5263 + 1 - V_A = 0 \Rightarrow V_A = 0,4737$$

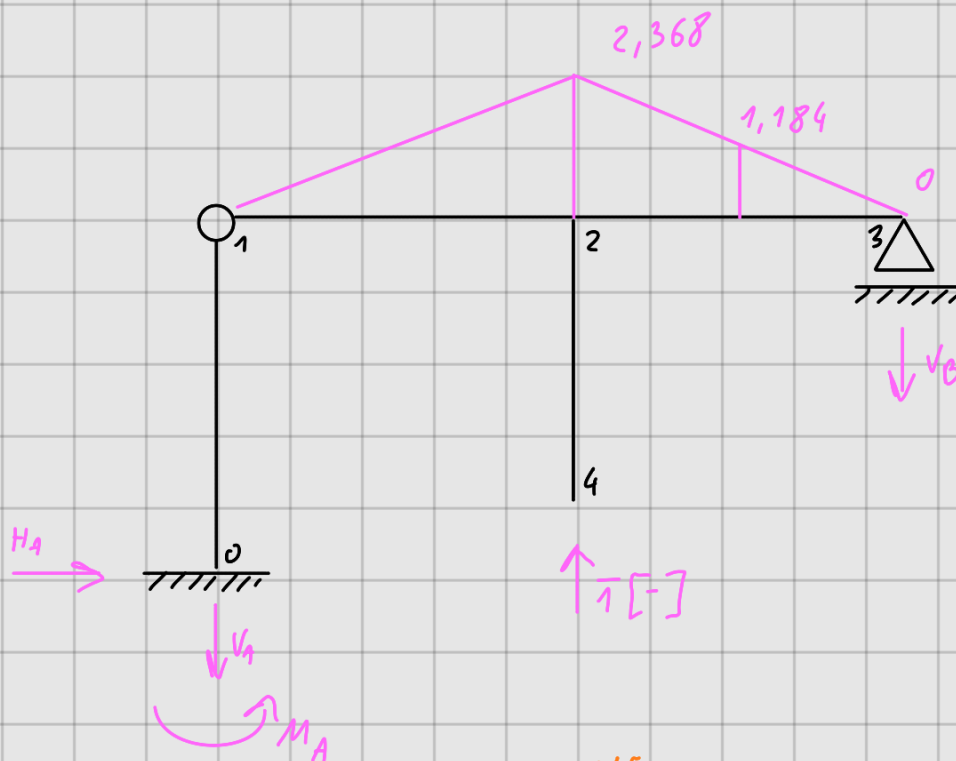


$$M + 0,5263 \cdot x = 0 \Rightarrow M = -0,5263 x$$

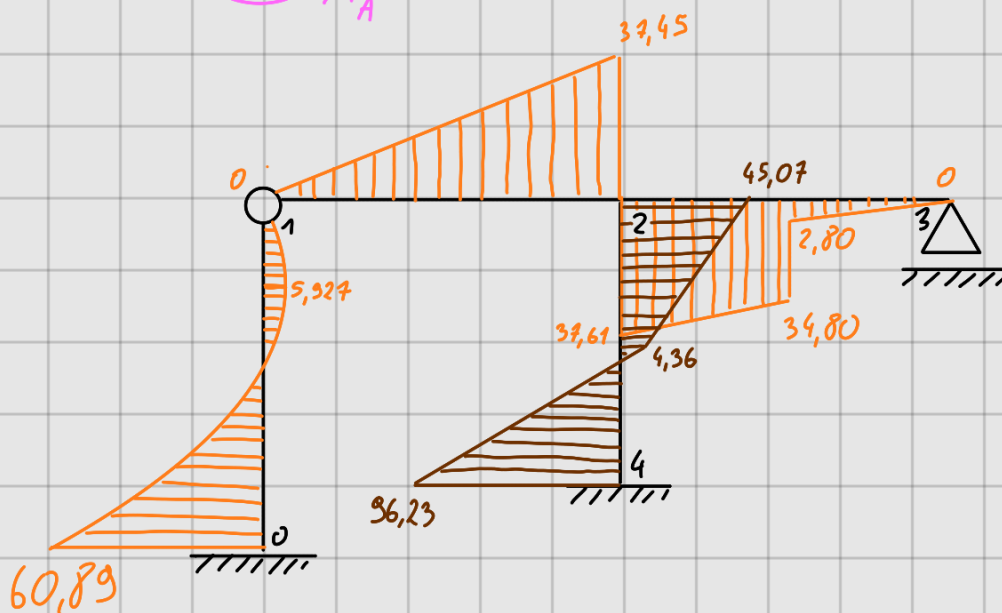
$$M^{(0)} = 0 \text{ kNm}$$

$$M^{(4,5)} = -2,368 \text{ kNm}$$

$$M^{(2,75)} = -1,184 \text{ kNm}$$



$\bar{M}^0 [m]$



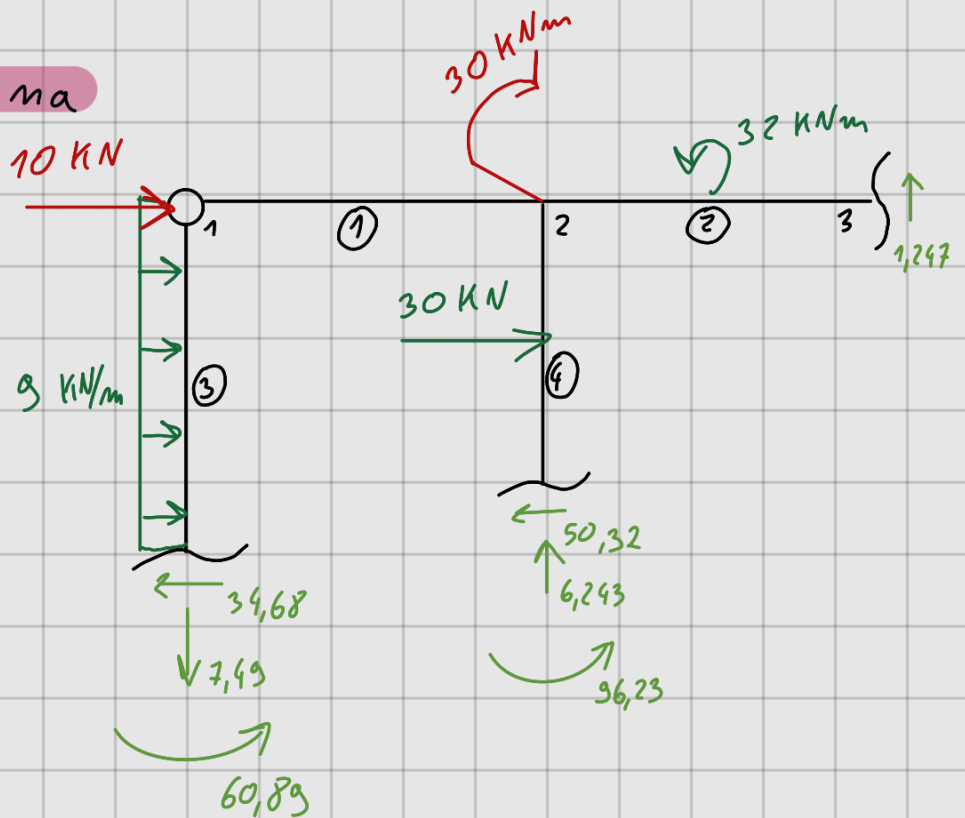
$M_p^{(m)} [kNm]$

$$1 \cdot \delta = \sum \int \bar{M}^0 \cdot \frac{M_p^m}{EI} dx$$

$$1 \cdot \delta = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 37,45 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,368 \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot 37,61 \cdot 2,25 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 2,368 - \frac{1}{3} \cdot 1,184 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{1}{2} \cdot 34,80 \cdot 2,25 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2,368 - \frac{2}{3} \cdot 1,184 \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot 7,80 \cdot 2,55 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 1,184 \right) \right] \right] \right] = \right. \\ \left. = \frac{1}{EI} [147,8027] + [-83,4942] + [-61,8048] + [-2,4864] = \right.$$

$$= \frac{0,0173}{EI} < \frac{1}{EI}$$

Kontrola statyczna



$$\sum X = 0 \Rightarrow 10 + 9 \cdot 5 + 30 - 34,68 - 50,32 = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -7,49 + 6,243 + 1,247 = 0$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -60,89 - 96,23 - 32 + 30 - 7,49 \cdot 5 + 34,68 \cdot 5 - 9 \cdot 5 \cdot 2,5 + \\ + 50,32 \cdot 4 - 30 \cdot 2 - 1,247 \cdot 4,5 = -0,0615 \approx 0$$

Sprawdzenie naprężeń normalnych

Przekrój dla prętów 1 i 2 : I 260

$$J_1 = 5740 \text{ cm}^4 \quad W_y = 442 \text{ cm}^3 \quad A = 53,30 \text{ cm}^2$$

$$|M_{21}| = 37,45 \text{ kNm} = 3745 \text{ kNcm}$$

$$|M_{23}| = 37,61 \text{ kNm} = 3761 \text{ kNcm}$$

Warunek naprężeń

$$\sigma_{21} = \frac{|M|}{W} + \frac{|N|}{A} = \frac{3745}{442} + \frac{20,33}{53,3} = 88,54 \text{ MPa} < 235 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{23} = \frac{|M|}{W} + \frac{|N|}{A} = \frac{3761}{442} + \frac{0}{53,3} = 85,09 \text{ MPa}$$

UWAGA

W tej grupie prętów momenty maksymalne dla pr. 1 i pr. 2 są zbliżone, siły normalne różne - dlatego sprawdzamy naprężenia w dwóch punktach

• Dla pręta 1:

$$M_{\max} = M_{21} = 37,45 \text{ kNm}$$

$$\text{siła normalna } N_{21} = -20,32 \text{ kN}$$

• Dla pręta 2:

$$M_{\max} = M_{23} = 37,61 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = 0 \text{ kN}$$

Przekrój dla prętów 3 i 4 : I 240 PE

$$J_2 = 3890 \text{ cm}^4 \quad W_y = 324 \text{ cm}^3 \quad A = 39,10 \text{ cm}^2$$

$$|M_{\max}| = 96,23 \text{ kNm} = 9623 \text{ kNcm}$$

Warunek naprężenia

$$\sigma_{42} = \frac{|M|}{W} + \frac{|N|}{A} = \frac{9623}{324} + \frac{6,243}{39,10} = 29,86 = 298,6 \text{ MPa} > 235 \text{ MPa}$$

Wnioski

Dla prętów 1 oraz 2 przyjęty przekrój spełnia warunki nośności, lecz wykorzystuje tylko $37,7\%$ jego nośności.

Dla efektywności należałoby zmniejszyć przekrój.

Dla prętów 3 oraz 4 przyjęty przekrój nie spełnia warunków nośności, należy zwiększyć przekrój.

Po zmianie przekrojów należy zadanie rozwiązać ponownie

dla nowego stosunku $\frac{J_1}{J_2}$